Skynotes Matdas Limit

[XI MIPA 1]

Teorama Limit

① $\lim_{x \to a} K = K$

② $\lim_{x \to a} [K \cdot f(x)]$
$k \lim_{\to} f(x) = K \cdot A$
$\to A$

③ $\lim [f(x) + g(x)]$
$= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
$= A + B$

④ $\lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$

⑤ $\lim (f(x)/g(x)] = \frac{A}{B}$

⑥ $\lim_{x \to 3} [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
$= A^n$

⑦ $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}^n$
$= \sqrt{A}$

3.1 Limit Fungsi di Satu Titik

Pengertian limit secara intuisi

Perhatikan fungsi

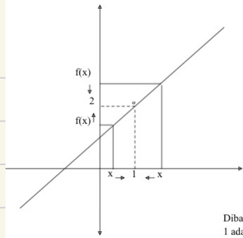
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Fungsi diatas tidak terdefinisi di x=1, karena di titik tersebut f(x) berbentuk 0/0. Tapi masih bisa ditanyakan berapa nilai f(x) jika x mendekati 1

Dengan bantuan kalkulator dapat diperoleh nilai f(x) bila x mendekati 1, seperti pada tabel berikut

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	→ 1 ←	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	1.9999	→ ? ←	2.0001	2.001	2.01	2.1

Secara grafik



Dari tabel dan grafik disamping terlihat bahwa f(x) mendekati 2 jika x mendekati 1

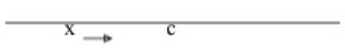
Secara matematis dapat dituliskan Sebagai berikut

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Dibaca " limit dari $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk x mendekati 1 adalah 2

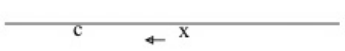
Definisi(limit secara intuisi). Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat, tetapi berlainan dengan c, maka f(x) dekat ke L

Limit Kiri dan Limit Kanan



Jika x menuju c dari arah kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari c, limit disebut limit kiri,

notasi $\lim_{x \to c^-} f(x)$



Jika x menuju c dari arah kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari c, limit disebut limit kanan,

notasi $\lim_{x \to c^+} f(x)$

Hubungan antara limit dengan limit sepihak(kiri/kanan)

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Jika $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$ maka $\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada

Sifat limit fungsi

Misal

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = G$ (limit dari f , g ada dan berhingga)

maka

1. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm G$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = LG$
3. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{G}, bila\ G \neq 0$
4. $\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$,n bilangan bulat positif
5. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ bila n genap L harus positif

Limit Tak Hingga dan Limit di Tak Hingga

Limit Tak Hingga

Misal $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, maka $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

$(i)\ +\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah atas

$(ii)\ -\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah bawah

$(iii)\ +\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah bawah

$(iv)\ -\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x) \to 0$ dari arah atas

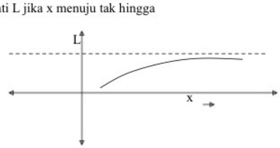
Ctt : g(x) □ 0 dari arah atas maksudnya g(x) menuju 0 dari nilai g(x) positif.

g(x) □ 0 dari arah bawah maksudnya g(x) menuju 0 dari nilai g(x) negatif.

Limit di Tak Hingga

a. $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ jika $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 \ni x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

atau f(x) mendekati L jika x menuju tak hingga



Kekontinuan Fungsi

Fungsi $f(x)$ dikatakan **kontinu** pada suatu titik $x = a$ jika

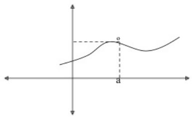
(i) f(a) ada

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ ada

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Jika paling kurang salah satu syarat diatas tidak dipenuhi maka f dikatakan tidak kontinu di x=a

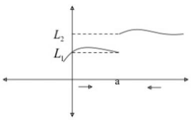
(i)



f(a) tidak ada

f tidak kontinu di x=a

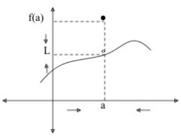
(ii)



Karena limit kiri(L1) tidak sama dengan limit kanan(L2) maka f(x) tidak mempunyai limit di x=a

Fungsi f(x) tidak kontinu di x=a

(iii)



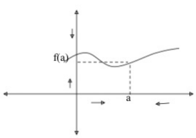
f(a) ada

$\lim_{x \to a} f(x)$ ada

Tapi nilai fungsi tidak sama dengan limit fungsi

Fungsi f(x) tidak kontinu di x=a

(iv)

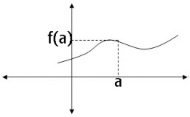


f(a) ada

$\lim_{x \to a} f(x)$ ada

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

f(x) kontinu di x=a



Ketakkontinuan terhapus

Ketakkontinuan kasus (i) bisa dihapus dengan cara mendefinisikan nilai fungsi dititik tersebut = limit fungsi

Limit dan Kekontinuan Fungsi Komposisi

- **Teorema Limit Fungsi Komposisi:**

Jika $\lim_{x \to a} g(x) = L$ dan $f(x)$ kontinu di L, maka

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(L)$$

- **Teorema kekontinuan fungsi komposisi:**

Jika $g(x)$ kontinu di a, $f(x)$ kontinu di $g(a)$, maka fungsi $(f \circ g)(x)$ konti di a.

Bukti

$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x))$

$= f(\lim_{x \to a} g(x))$ karena f kontinu di g(a)

= f(g(a)) karena g kontinu di a

= (fog)(a)

Kekontinuan pada interval

- Fungsi $f(x)$ dikatakan **kontinu pada interval buka** (a,b) bila $f(x)$ kontinu pada setiap titik di dalam interval tersebut.
- Sedangkan $f(x)$ dikatakan **kontinu pada interval tutup** [a,b] bila :

1. $f(x)$ kontinu pada (a,b)
2. $f(x)$ kontinu kanan di $x = a$
3. $f(x)$ kontinu kiri di $x = b$

Bila $f(x)$ kontinu untuk setiap nilai $x \in$ ***R*** maka dikatakan $f(x)$ kontinu (dimana-mana).

- **Teorema 3.2**
- Fungsi Polinom kontinu dimana-mana
- Fungsi Rasional kontinu pada Domainnya
- Misalkan $f(x) = \sqrt[n]{x}$, maka
- $f(x)$ kontinu di setiap titik di ***R*** jika n ganjil
- $f(x)$ kontinu di setiap ***R*** positif jika n genap.

Contoh : tentukan selang kekontinuan $f(x) = \sqrt{x-4}$

Dari teorema diatas diperoleh f(x) kontinu untuk x-4>0 atau x>4.

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = 0 = f(4)$ $\Rightarrow$ f(x) kontinu kiri di x=4

Sehingga f(x) kontinu pada [4, ∞)