SKYNOTES

MATH SCIENCE – KELAS X

VEKTOR

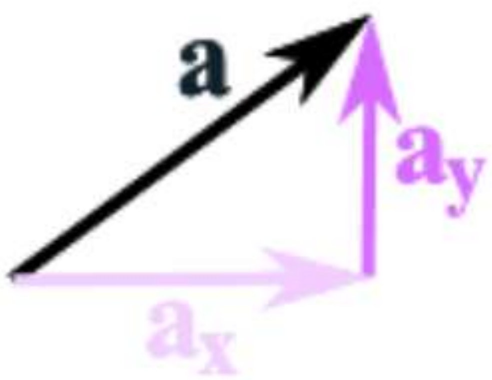
Vektor adalah **besaran** yang memiliki **nilai** *dan* **arah**.

Vektor **2 dimensi** mempunyai 2 komponen; komponen x dan komponen y.

Vektor **3 dimensi** punya 3 komponen; komponen x, komponen y, dan komponen z (kadang ditulis dengan satuan yaitu i, j, dan k)

Nilai suatu vektor ditentukan dari pergeseran arahnya.

(2 dimensi)



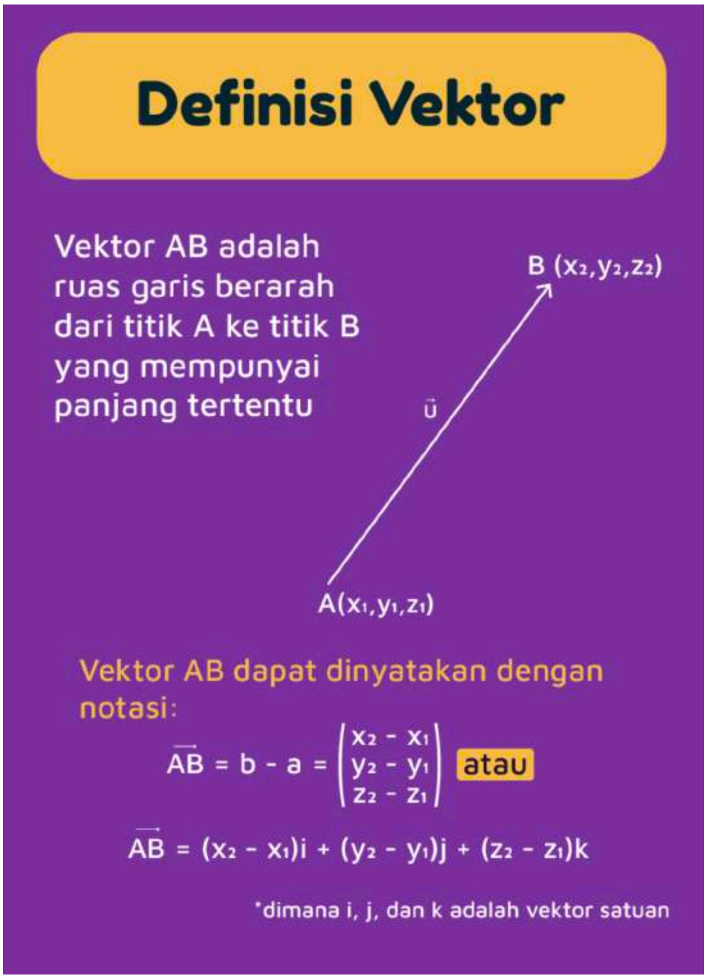
Komponen x:

Pergeseran ke kanan → **x positif**
Pergeseran ke kiri → **x negatif**

Komponan y:

Pergeseran ke atas → **y positif**
Pergeseran ke bawah → **y negatif**

(3 dimensi)



Sumber: zenius.com

PENJUMLAHAN VEKTOR

Dapat dilakukan dengan menempatkan pangkal vektor kedua pada ujung vektor pertama. Hasil (resultan vektor)nya akan berpangkal di titik pangkal vektor pertama dan berujung di ujung vektor kedua (***head to tail method***)

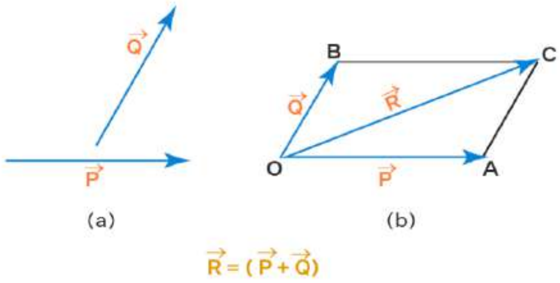
Untuk penjumlahan dua vektor, vektor-vektor akan membentuk segitiga (**metode segitiga**).

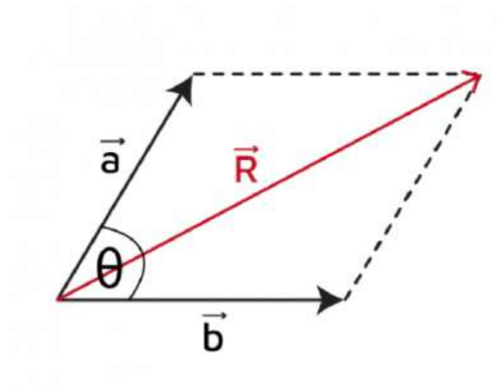
(Masih untuk penjumlahan dua vektor) bisa juga menggunakan **metode jajar genjang**,

Pertama, kedua vektor ditempatkan pada pangkal yang sama.

Kedua, tarik garis putus-putus yang sejajar dengan vektor sampai bertemu pada satu titik.

Ketiga, Tarik garis dari pangkal kedua vektor sampai ke titik pertemuan garis putus-putus. Maka vektor R adalah hasil penjumlahan kedua vektor tersebut.



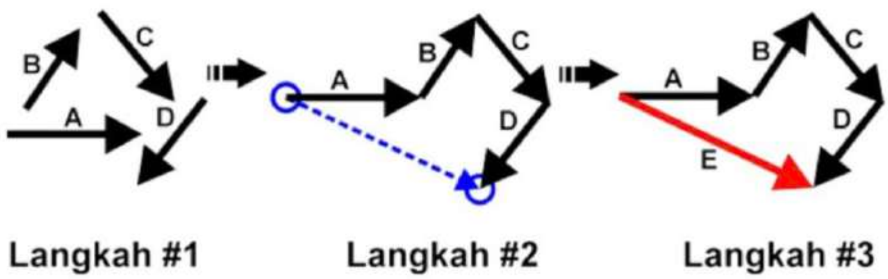


$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

Rumus vektor hasil *penjumlahan* secara metode jajar genjang (geometri) yaitu:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta)}$$

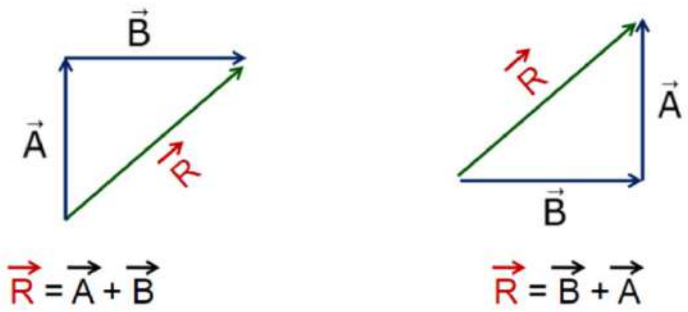
Untuk penjumlahan lebih dari dua vektor, vektor-vektornya akan membentuk poligon (**metode poligon**).



Penjumlahan vektor bersifat:

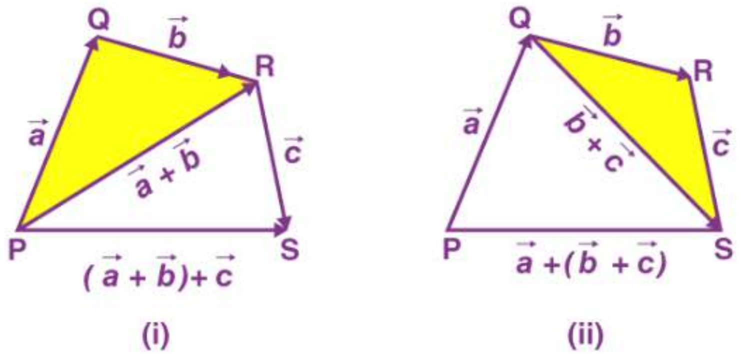
1) Komutatif

   Vektor manapun yang ditempatkan duluan dalam operasi penjumlahan, hasilnya akan sama.



2) Asosiatif

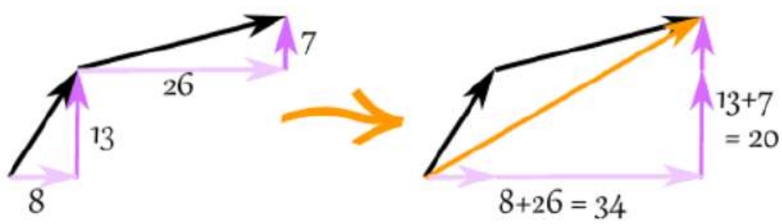
Dapat dilakukan pengelompokkan dalam penjumlahan vektor, resultannya akan sama.



Penambahan vektor dapat dilakukan dengan cara menambahkan komponen x dan komponen y dari masing-masing vektor.

CONTOH: jumlahkan vektor $\overrightarrow{a}$ = (8, 13) dengan vektor $\overrightarrow{b}$ = (26, 7)!

→ (8 + 26, 13 + 7) = (34, 20)

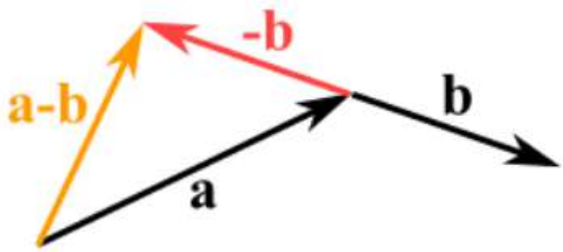


(**3 dimensi**) jika diketahui vektor $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ dan vektor $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ maka cara menghitung *penjumlahan* vektornya adalah:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

PENGURANGAN VEKTOR

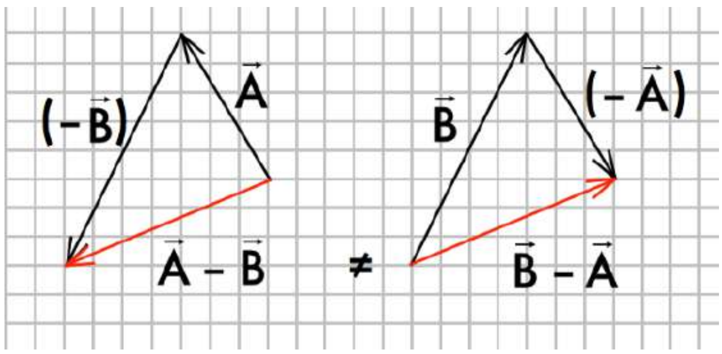
Pertama, balik arah vektor yang mau kita kurang. Kedua, jumlahkan vektor seperti cara-cara yang sudah dijelaskan sebelumnya.



a − b

Dalam pengurangan vektor, **tidak berlaku sifat komutatif**:

$$\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$$



Karena sifat komutatif tidak berlaku, maka **sifat asosiatif juga tidak berlaku**. Pengelompokkan dalam pengurangan akan menghasilkan resultan yang berbeda.

Cara menghitung pengurangan vektor sama kayak penjumlahan, beda simbol operasi saja 👍

CONTOH: kurangi vektor $\vec{b}$ = (26, 7) dari vektor $\vec{a}$ = (8, 13)!!!

→ $\vec{a}$ + -($\vec{b}$)= $\vec{a}$ - $\vec{b}$ = (a_x - b_x , a_y - b_y)

→ (8 - 26, 13 - 7) = (-18, -19)

Rumus vektor hasil *pengurangan* secara geometris adalah:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(}|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta)$$

(**3 dimensi**) jika diketahui vektor $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ dan vektor $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ maka cara menghitung *pengurangan* vektornya adalah:

$$\text{a - b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & -b_2 \\ a_3 & -b_3 \end{pmatrix}$$

NILAI VEKTOR

Disimbolkan seperti berikut (ada dua garis tegak di kedua sisi vektor):

$$|a|$$

Walaupun bentuknya mirip-mirip, notasi di atas **berbeda dari notasi nilai mutlak**.

Cara mencari panjang vektor:

(**2 dimensi**)

$$|a| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

(**3 dimensi**)

$$|a| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

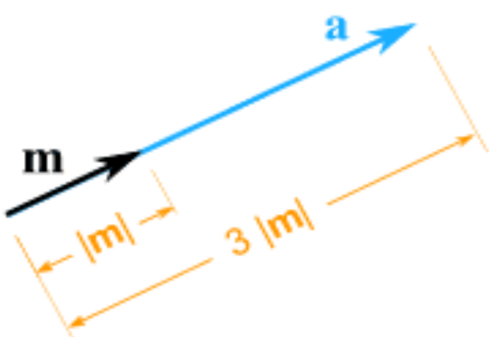
CONTOH: berapa nilai vektor $\overrightarrow{b}$ = (6, 8)?

$\rightarrow|\mathbf{b}| = \sqrt{(6^2 + 8^2)} = \sqrt{(36 + 64)} = \sqrt{100} = 10$

CONTOH: berapa nilai vektor $\overrightarrow{b}$ = (2, 8, 4)?

$\rightarrow|\mathbf{b}| = \sqrt{(2^2 + 8^2 + 4^2)} = \sqrt{(4 + 64 + 16)} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$

PERKALIAN VEKTOR DENGAN SKALAR



Kita dapat mengalikan suatu vektor dengan suatu skalar (tapi nggak kebalikannya! Skalar nggak bisa dikalikan dengan vektor) untuk **mengubah besar-kecilnya vektor** tersebut, tetapi **arahnya tetap sama**.

CONTOH: kalikan vektor $\overrightarrow{m}$= (7, 3) dengan skalar 3!

$m = (m_x, m_y)$

$3m = (3 \times m_x, 3 \times m_y) = (3 \times 7, 3 \times 3) = (21, 9)$

→ Arahnya masih sama, tapi 3 kali lebih besar.

(3 dimensi)

$$\text{jika } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ maka k. } \vec{a} = \text{k.} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a_1 \\ k.a_2 \\ k.a_3 \end{pmatrix}$$

PERKALIAN ANTARVEKTOR

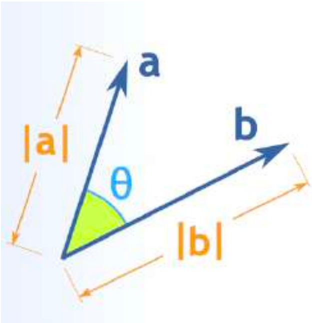
1. Dot Product

Perkalian dua vektor yang hasilnya skalar.

Ditulis menggunakan titik antara kedua vektor yang dikalikan:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$$

Berarti dot product a dan b.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$

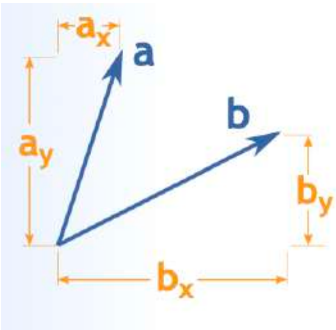
Di mana

$|a|$ = nilai (panjang) vektor a

$|b|$ = nilai (panjang) vektor b

θ = sudut antara vektor a dan vektor b

(<u>Pangkal kedua vektor harus sama</u>!)



ATAU cara lain:

Kali masing-masing komponen x dan komponen y

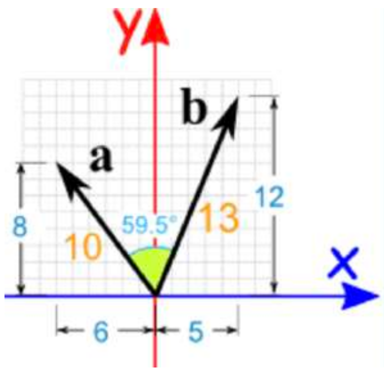
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y$ (**2 dimensi**)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y + a_z \times b_z$ (**3 dimensi**)

Bisa cara pertama atau kedua, yang mana saja boleh. Tergantung informasi yang dimiliki.

CONTOH:

Tentukan $\vec{a} \cdot \vec{b}$!



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \cdot 13 \cdot \cos 59.5°$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \cdot 13 \cdot 0.5075...$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 65.98... = 66$ (dibulatkan)

ATAU

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \times b_x + a_y \times b_y$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-6 \times 5) + (8 \times 12)$

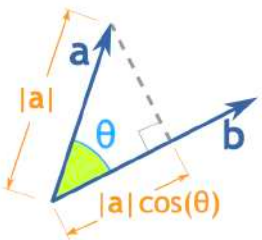
$\vec{a} \cdot \vec{b} = -30 + 96$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 66$

Kenapa cos θ???????

Untuk mengalikan dua vektor kita harus mengalikan panjangnya, tetapi hanya bisa dilakukan jika keduanya memiliki arah yang sama.

Jadi, antara dua vektor yang pangkalnya membentuk sudut θ, kita dapat mencari komponen vektor pertama yang arahnya sama dengan vektor kedua dengan cara mengalikan vektor pertama dengan cos θ.



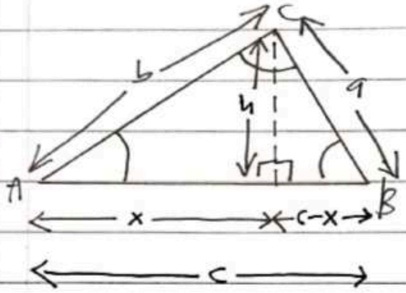
Komponen vektor a yang searah dengan vektor b = $|a| \cdot \cos\theta$

Lalu keduanya, yang sudah searah, dikalikan. Maka akan didapatkan hasil perkalian atak *dot product* kedua vektor tersebut :D.

informasi tambahan turunan rumusnya:

No.: Date:

HUKUM KOSINUS



$$\left.\begin{aligned} b^2 &= h^2 + x^2 \\ h^2 &= b^2 - x^2 \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c-x)^2 \\ h^2 &= a^2 - (c-x)^2 \end{aligned}\right.$$

$\hookrightarrow b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$

$\rightarrow b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$

$\rightarrow b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$

$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$

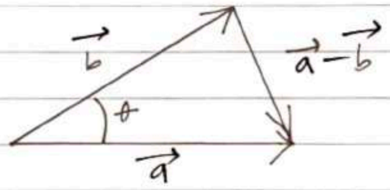
$\rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$

$\cos \angle A = \dfrac{x}{b}$

$\hookrightarrow x = b \cdot \cos A$

No.: Date:

$$\boxed{(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}}$$



Berdasarkan hukum kosinus :

$$\boxed{(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta}$$

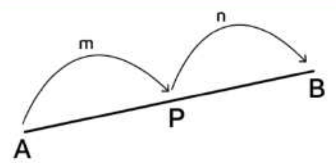
$\hookrightarrow (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$

$\rightarrow -2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$

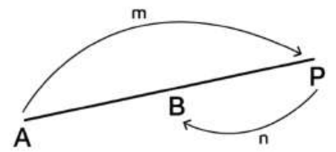
$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$

<u>PEMBAGIAN VEKTOR</u>

A. Pembagian Dalam Ruas Garis

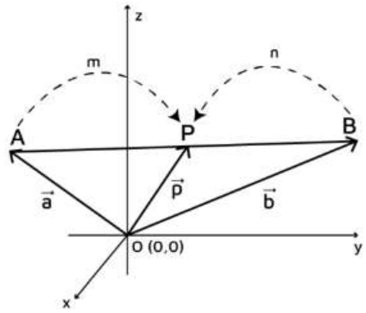


Titik P berada di antara titik A dan B, membagi garis AB dengan perbandingan AP : PB = m : n



Titik P membagi garis AB di luar dengan perbandingan AP : PB = m : (-n)

B. Pembagian Dalam Bentuk Vektor



Jika a, b dan p adalah vektor posisi dari titik A, B dan P dengan perbandingan AP : PB = m : n
Maka:

$$p = \frac{m.\vec{b} + n.\vec{a}}{n+m}$$

B. Pembagian Dalam Bentuk Koordinat

Jika titik P (x_p, y_p, z_p) membagi garis AB dimana A(x_1, y_1, z_1) dan B(x_2, y_2, z_2) dengan perbandingan AP : PB = m : n.
Maka:

$$x_p = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

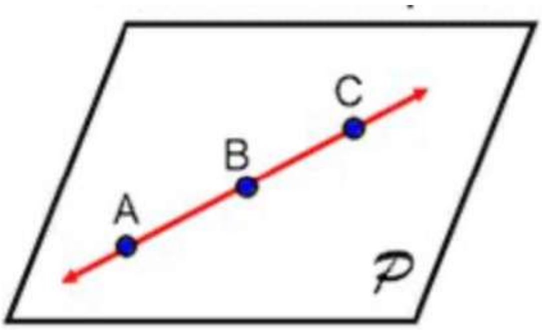
$$y_p = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

$$z_p = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}$$

KOLINEAR DAN KOPLANAR

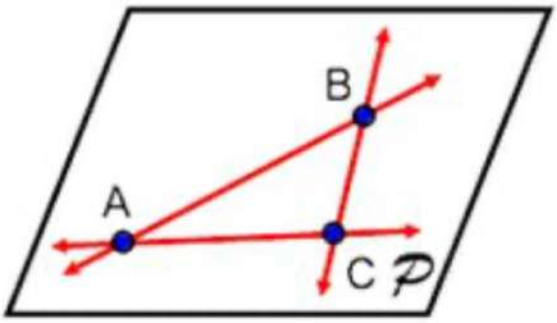
1. Kolinear

Dua garis atau lebih berada di dalam satu garis= kolinear



2. Koplanar

Dua titik atau lebih berada di dalam satu bidang= koplanar.



(Fun fact: 3 titik apapun akan selalu koplanar: kalau disambungin, mereka bertiga bakal ngebentuk suatu bidang geometri. Dan jumlah 3 titik yang koplanar akan selalu 0.)

CONTOH SOAL

Titik R terletak di antara titik P (2,7,8) dan Q(-1, 1, -1) yang membagi garis PQ di dalam dengan perbandingan 2:1. Maka koordinat R adalah…

Penyelesaian

PR : RQ = 2 : 1 → $\vec{r} = \frac{2\vec{q}+\vec{p}}{2+1}$

$= \frac{2(-1,1,-1)+(2,7,8)}{3} = \frac{(-2,2,-2)+(2,7,8)}{3} = \frac{(0,9,6)}{3}$

= (0,3,2)

Nilai p agar vektor 2i + pj + k dan 4i – 2j – 2k saling tegak lurus adalah…

Penyelesaian

karena saling tegak lurus maka
$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90° = \vec{a} \cdot \vec{b}$
0 = (2i + pj + k).(4i – 2j – 2k)
0 = [2.4 + p.(-2) + 1.(-2)]
0 = 8 – 2p – 2
0 = 6 – 2p
2p = 6
p = 3

Jika besar sudut antara vektor $\vec{p}$ dan vektor $\vec{q}$ adalah 60°, panjang $\vec{p}$ dan $\vec{q}$ masing-masing 10 dan 6 maka panjang vektor $\vec{p}$ - $\vec{q}$ = …

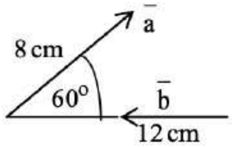
Penyelesaian

$|\vec{p} - \vec{q}| = \sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|cos\theta}$

$= \sqrt{|10|^2 + |6|^2 - 2|10||6|cos\mathbf{60}°}$

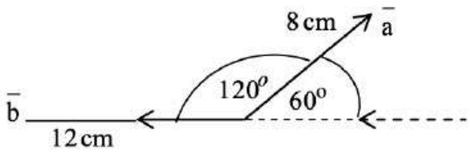
$= \sqrt{100 + 36 - 2(60)\frac{1}{2}} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

Diketahui dua vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ seperti gambar di samping, Tentukanlah nilai $\bar{a} \cdot \bar{b}$



Jawab

Karena kedua pangkal vektor belum berimpit, maka kedua vektor digambar menjadi



Sehingga sudut antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah 120^0

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos \alpha$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (8)(12).\cos 120^0$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (8)(12)(-1/2)$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = -48$

Jika diketahui dua vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ dimana $|\bar{a}| = 6$ cm dan $|\bar{b}| = 4$ cm serta berlaku $(\bar{a} + \bar{b}).(\bar{a} + \bar{b}) = 16$. Tentukanlah nilai $\bar{a} \cdot \bar{b}$

Jawab

$(\bar{a} + \bar{b}).(\bar{a} + \bar{b}) = 16.$

$\bar{a} \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} = 16.$

$|\bar{a}|\,|\bar{a}| \cos 0^0 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{b}|\,|\bar{b}| \cos 0^0 = 16$

$|\bar{a}|\,|\bar{a}|(1) + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{b}|\,|\bar{b}|(1) = 16$

$(6)(6) + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + (4)(4) = 16$

$36 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + 16 = 16$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = -18$

Jika diketahui vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ dimana $|\bar{a}| = 4$ cm dan $|\bar{b}| = 5$ cm serta $<(\bar{a}, \bar{b}) = 60^0$ maka tentukanlah nilai $|\bar{a} - \bar{b}|$

Jawab

$(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b}$

$|\bar{a} - \bar{b}|\,|\bar{a} - \bar{b}| \cos 0^0 = |\bar{a}|\,|\bar{a}| \cos 0^0 - |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos 60^0 - |\bar{b}|\,|\bar{a}| \cos 60^0 + |\bar{b}|\,|\bar{b}| \cos 0^0$

$|\bar{a} - \bar{b}|^2 (1) = |\bar{a}|\,|\bar{a}|(1) - |\bar{a}|\,|\bar{b}|(1/2) - |\bar{b}|\,|\bar{a}|(1/2) + |\bar{b}|\,|\bar{b}|(1)$

$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = (4)(4)(1) - (4)(5)(1/2) - (5)(4)(1/2) + (5)(5)(1)$

$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = 16 - 10 - 10 + 25$

$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = 21$

$|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{21}$

Diketahui P(2, 2x, 0), Q(–1, 1, –7) dan R(3x, 3, x). Jika $\overline{PQ}.\overline{PR}$ = –23 maka tentukanlah nilai x

Jawab

$\overline{PQ}.\overline{PR} = -23$

$$\begin{bmatrix} -1-2 \\ 1-2x \\ -7-0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3x-2 \\ 3-2x \\ x-0 \end{bmatrix} = -23$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1-2x \\ -7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3x-2 \\ 3-2x \\ x \end{bmatrix} = -23$$

$-3(3x - 2) + (1 - 2x)(3 - 2x) + (-7)(x) = -23$

$-9x + 6 + 3 - 2x - 6x + 4x^2 - 7x + 23 = 0$

$4x^2 - 24x + 32 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x - 4)(x - 2) = 0$

Maka $x = 4$ atau $x = 2$

Diketahui dua vektor $\bar{a} = 3\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$ dan $\bar{b} = 4\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}$. Maka tentukanlah nilai $\bar{a}\,.\,\bar{b}$

Jawab

$\bar{a}\,.\,\bar{b} = (3)(4) + (-3)(-5) + (5)(3)$

$\bar{a}\,.\,\bar{b} = 12 + 15 + 15$

$\bar{a}\,.\,\bar{b} = 42$

Diketahui tiga titik A(4, -1, 2), B(5, 2, 5) dan C(-3, 4, 0). Tentukanlah nilai $\overline{AB}\,.\,\overline{AC}$

Jawab

$\lceil\ 5-4\ \rceil \quad \lceil 1 \rceil$

Diketahui vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ dimana $|\bar{a}|$ = 6 cm dan $|\bar{b}|$ = 4 cm serta $|\bar{a}+\bar{b}|$ = 8 cm. Jika α adalah sudut antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$, maka tentukanlah nilai $\cos\alpha$

Jawab

$(\bar{a}+\bar{b}).(\bar{a}+\bar{b}) = \bar{a}.\bar{a} + \bar{a}.\bar{b} + \bar{b}.\bar{a} + \bar{b}.\bar{b}$

$|\bar{a}+\bar{b}|\,|\bar{a}+\bar{b}| \cos 0^0 = |\bar{a}|\,|\bar{a}| \cos 0^0 + |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos\alpha + |\bar{b}|\,|\bar{a}| \cos\alpha + |\bar{b}|\,|\bar{b}| \cos 0^0$

$(8)(8)(1) = (6)(6)(1) + (6)(4)\cos\alpha + (4)(6)\cos\alpha + (4)(4)(1)$

$64 = 36 + 24.\cos\alpha + 24.\cos\alpha + 16$

$64 = 52 + 48.\cos\alpha$

$64 - 52 = 48.\cos\alpha$

$48.\cos\alpha = 12$

$\cos\alpha = 1/4$ jadi $\alpha = 75{,}52^0$

Diketahui vektor $\bar{a} = \begin{bmatrix} x+1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3x \\ x^2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Jika $\bar{a}$ tegak lurus $\bar{b}$ maka tentukanlah

ka

nilai x

Jawab

Jika vektor $\bar{a}$ tegak lurus vektor $\bar{b}$ maka $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

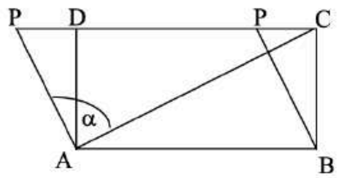
Maka : $\bar{a} \cdot \bar{b} = \begin{bmatrix} x+1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3x \\ x^2 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$

$$(x + 1)(3x) + (-2)(x^2) + (5)(-2) = 0$$
$$3x^2 + 3x - 2x^2 - 10 = 0$$
$$x^2 + 3x - 10 = 0$$
$$(x + 5)(x - 2) = 0$$

Jadi $x = -5$ atau $x = 2$

Diketahui persegi panjang ABCD dimana P pada CD sehingga $\overline{CP} : \overline{PD} = 1 : 3$. Jika panjang $\overline{AB}$ 8 cm dan $\overline{AD}$ 6 cm, maka tentukanlah nilai $\overline{AB} \cdot \overline{PB} + \overline{BC} \cdot \overline{PB}$

Jawab



$|\overline{AC}| = 10$ cm

$|\overline{PA}| = \sqrt{40}$ cm $= 2\sqrt{10}$ cm

$|\overline{PC}| = 10$ cm